

# 求解 GPS/MET 观测算子的经济算法\*

李树勇<sup>1\*\*</sup> 王 斌<sup>1</sup> 邹晓蕾<sup>2</sup> 刘 辉<sup>2</sup>

1. LASC, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029;

2. Department of Meteorology, Florida State University, USA

**摘要** 全球定位系统(GPS)“射线打靶法”是 GPS/MET(气象)资料变分同化中联系 GPS 原始观测与大气状况的一种自成一体的观测算子,但其计算量非常巨大而难以在资料同化和业务预报中使用. 为了减少该观测算子的计算量,针对 GPS 射线轨迹方程为一可分 Hamilton 系统的特点,采用二阶经济辛格式求解,取得很好的效果. 与经典的四阶 Runge-Kutta 法相比,不仅计算准确度没有降低甚至有所改善,而且计算时间仅为经典方法的 1/4.

**关键词** GPS 射线打靶 辛格式 经济算法

自 1995 年美国发射第一颗装备有 GPS 接收器的地球低轨卫星(LEO)以来,全球定位系统(GPS)“掩星”技术的研究和应用得到了很大的发展,并已成为大气遥测中的前沿课题<sup>[1-6]</sup>. 原始“掩星”资料的处理已由单点反演发展到变分同化分析,使得大气要素的信息能被有效地提取出来<sup>[1-3]</sup>,这预示着 GPS“掩星”技术将为数值天气预报提供一个新的有生命力的资料来源. 然而,要将原始 GPS 观测资料真正用于业务数值天气预报尚有很长的路要走,目前这一领域的研究仍处于探索性的试验之中. 联系 GPS“掩星”资料与大气要素的 GPS/MET 观测算子在 GPS“掩星”资料变分同化中起着非常关键的作用. 为了达到和全球常规探空资料相同的水平分辨率,至少需要对 1000 个 GPS“掩星”进行三维变分同化分析. 做一次 GPS 资料变分同化至少需要 40 次优化迭代,如果我们对 1000 个 GPS“掩星”进行三维变分同化分析,每一次优化迭代就要求解 GPS/MET 观测算子模式及其伴随模式各 1000 次. GPS“射线打靶法”是 GPS 资料变分同化中一种自成一体的观测算子,原有的 GPS“射线打靶法”采用四阶 Runge-Kutta 方法求解,根据我们在 SGI Origin 2000 上的试验,用四阶 Runge-Kutta 方法求解一次该观测算子平均需要 373 s,而求解一次其伴随模式平均需要 1900 s,因此做一次变分同化至少需要 1052 d,如此巨大的计算量对于业务数值天气预报是不现实的. 因此,如何大规模节省计算时间成为 GPS“掩星”资料变分同化急需解决的首要问题之一. 如果能减少求解 GPS/MET 观测算子的计算时间,其伴随模式的计算时间就会相应减少,进而 GPS 资料变分同化的时间也会减少.

2001-01-15 收稿,2001-04-06 收修改稿

\* 国家重点基础研究发展规划(批准号:1999032801)、国家自然科学基金(批准号:40005004)、国家杰出青年科学基金(批准号:49825109)和中国科学院重要创新方向(编号:KZCX2208)资助项目

\*\* E-mail: lsy@mail.iap.ac.cn

本文采用先进的数值方法——辛几何算法<sup>[5,6]</sup>对 GPS“射线打靶法”的求解进行改进,以取得省时效果,为最终实现 GPS 观测资料的业务使用迈出了坚实的第一步。

## 1 GPS 资料同化问题

设在某一时刻, GPS 卫星从高到低在  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$  处连续的发出 GPS 射线, 被 LEO 卫星在  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_N$  处接收到(图 1), 并且测量到了相应的 GPS 折射角<sup>[3]</sup>  $\alpha_i$  与影响参数<sup>[3]</sup>  $a_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ , 在这个过程中我们所获信息称为该时刻的 GPS 掩星记录垂直廓线。通过 LEO 上的 GPS 接收器, 可以得到很多这样的 GPS 掩星记录垂直廓线。

GPS 气象观测资料(GPS 掩星记录、GPS 折射角)里面包含了大气温度、气压和湿度的信息, 能否以及怎样从这些资料里面把大气要素的状态确定下来已成为大气科学中的一个重要研究课题。目前有两种实施方案: 一种就是同化<sup>[3,7]</sup>, 另一种是反演。本文主要讨论同化中的问题。

下面, 先简要介绍一下 GPS 资料变分同化的方案, 为此我们定义泛函

$$J(x) = \frac{1}{2}(y - Hx)^T(\mathbf{O} + \mathbf{F})^{-1}(y - Hx) + \frac{1}{2}(x - x_b)^T \mathbf{B}^{-1}(x - x_b), \quad (1)$$

这里  $x$  表示大气状态的量,  $x_b$  是大气状态的背景场估计,  $\mathbf{B}$  是背景场估计的协方差矩阵,  $y$  是 GPS 气象观测数据,  $H$  是 GPS/MET 观测算子,  $\mathbf{O}$  是观测数据误差协方差矩阵,  $\mathbf{F}$  是 GPS/MET 观测算子误差协方差矩阵。

GPS 资料变分同化问题就归结为求上述泛函的最小值问题, 亦即一个变分问题。

邹晓蕾、王斌等已在美国国家环境预报中心(NCEP)的谱统计插值(SSl)三维变分同化系统中使用了 GPS 观测资料, 成功地实现了 GPS 折射角资料的三维变分同化<sup>[1,2]</sup>。

GPS 折射角资料变分同化的难点之一是运算量特别巨大, 在水平分辨率相同的情况下, 其计算时间大概是常规观测资料同化计算的几百倍, 这是制约方法可行性的一个重要因素。究其原因, 主要是 GPS/MET 观测算子和它的伴随算子计算量非常巨大。因此寻求高效省时的计算方法来求解 GPS 观测算子成为解决 GPS 资料变分同化问题的关键。本文将在这方面做初步的尝试。

## 2 GPS/MET 观测算子的求解

GPS/MET 观测算子包括 3 个部分:

(1) 折射率指数  $n$  与温度  $T$ 、水汽压  $P_w$  和气压  $P$  的代数关系式

$$n = 1 + c_1 \frac{P}{T} + c_2 \frac{P_w}{T^2}, \quad (2)$$

其中  $c_1 = 7.76 \times 10^{-5} \text{K/hPa}$ ,  $c_2 = 3.73 \times 10^{-1} \text{K}^2/\text{hPa}$ ,  $T$  为大气温度,  $P_w$  为水汽压,  $P$  是气压。

(2) GPS 射线轨迹方程

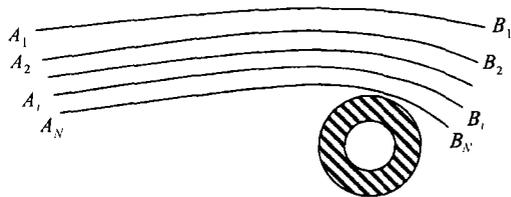


图 1 GPS 掩星技术

$$\frac{d^2x}{ds^2} = n \nabla n, \quad (3)$$

其中  $x = x(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))^T$  是射线轨迹,  $ds = dL/n$ ,  $L$  是射线长度,  $n$  是大气折射率指数, 由(2)式计算.

(3) 几何关系: 当射线轨迹被确定后, 射线进入大气层的入射角以及从大气层出来的射出角便可用几何的方法得到, 最终得到折射角.

有两种不同的 GPS/MET 观测算子, 一种是 GPS 射线追踪法, 一种是 GPS 射线打靶法, 它们的不同主要在于如何确定 GPS 射线轨迹方程的初始条件之一  $\left. \frac{dx}{ds} \right|_{s=0}$ . 射线追踪法采用 POCC (Payload Operations Control Center) 近似方法确定, 这样就有可能引入额外的噪音和偏差. GPS 射线打靶法是直接利用 GPS 发射器的位置、低轨卫星接收器的位置和大气状态、射线的切线方向(用 GPS 观测资料中的射线在近地面点的切线方向近似), 通过 GPS 射线轨迹方程求出射线的轨迹, 从而求出 GPS 折射角和影响参数, 是一个独立的、自成一体的技术. 目前国际上之所以采用“射线追踪法”来进行变分同化<sup>[1,2]</sup>, 是因为 GPS 射线打靶法比射线追踪法更昂贵, 尚未达到实用. 本文试图用先进的数值算法对 GPS 射线打靶法的求解进行改进, 使之达到实用的地步.

我们用图 2 来概述射线打靶法. 设 GPS 卫星在  $A$  点, LEO 卫星在  $B$  点, 现在要确定 GPS 射线从  $A$  到  $B$  的折射角, 必须首先确定 GPS 射线的入射角  $\theta_1$ . 首先选定一个初始入射角  $\theta_1$ , 从  $A$  点发出一条 GPS 射线, 如果  $B$  点离此 GPS 射线的距离  $d$  较小, 则认为初始入射角是对的, 计算射出角, 从而计算折射角. 如果  $d$  较大, 则不断调整初始入射角, 直到初始入射角是正确为止, 然后积分 GPS 射线轨迹方程, 求出射线的路径, 最后再计算射出角, 从而计算折射角.

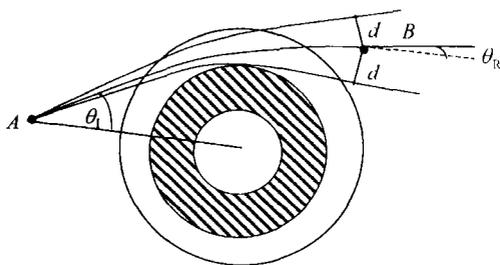


图 2 GPS 射线打靶法原理

在 GPS 射线打靶法中, 求解 GPS 射线轨迹方程是基本的. 只要找到高效省时的 GPS 射线轨迹方程的数值解法, GPS 射线打靶法的运行时间就会大大降低.

GPS 射线轨迹方程(3)可以写成一个等价的方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = u \\ \frac{du}{ds} = n \nabla n. \end{cases} \quad (4)$$

对上述方程组, 原有的 GPS 射线打靶法采用四阶 Runge-Kutta 方法求解, 四阶 Runge-Kutta 方法精度较高, 但每积分一步, 需要计算右端项 4 次, 工作量很大, 且格式存在耗散, 长时间的数值积分, 将会发生能量的损失.

为了降低 GPS 射线打靶法的运行时间, 我们选取隐式交替方向法求解上述方程组. 隐式交替方向法的精度只有二阶, 但它是一种保结构算法, 亦即辛几何算法<sup>[5,6]</sup>. 辛算法与传统非辛算法的差别为: 传统非辛算法全然不能进行长期轨道跟踪, 而一切辛算法都拥有长期乃至无

限长期的跟踪能力. 所用的数值积分公式为

$$\begin{cases} \frac{x^{k+1} - x^k}{\nabla \tau} = u^{k+\frac{1}{2}} \\ \frac{u^{k+\frac{3}{2}} - u^{k+\frac{1}{2}}}{\nabla \tau} = (n \nabla n)^{k+1}, \end{cases} \quad (5)$$

其中, 上标为整数的量如  $x$  是在整网格点上定义, 上标为分数的量如  $u$  是在半网格点上定义. 上述格式为人们所熟悉, 所不同的是, 冯康<sup>[7,8]</sup>提出辛几何算法理论后, 证明了该格式的保辛性质, 给它赋予了新的生命力. 而这种生命力不仅在其他的工作中得到体现<sup>[3]</sup>, 而且也将在本文的应用中得到进一步的检验. 邹晓蕾、王斌等采用此方法改进了一个 GPS/MET 观测算子“射线追踪”法<sup>[3]</sup>, 其向前模式在原有 Runge-Kutta 法基础上节省时间近 1/2, 而其伴随模式节省时间近 1/3. 改进后的观测算子模式及其伴随模式已在 GPS 三维同化中得到应用<sup>[2]</sup>, 并取得满意的省时效果. 在本文的研究中, 通过使用辛算法(即隐式交替方向法), 我们取得了更好的时间效益. 之所以选用隐式交替方向法求解方程组(4), 还基于如下的考虑: 由于方程组(4)是一个可分系统, 采用隐式交替方向法却可以显式求解, 这样既保证了计算稳定性, 又保障算法的省时性, 因而可以使观测算子模式的运算速度得到很大的提高.

应该指出, 利用该数值积分方法计算, 必须事先提供附加的计算初始值  $u^{1/2}$ . 而提供附加计算初始值的方法, 精度不应低于二阶. 使用隐式 Euler 中央差格式或四阶 Runge-Kutta 方法等都可达到这个目的.

### 3 新、旧 GPS 射线打靶法的数值模拟结果对比

为了检验改进的 GPS 射线打靶法向前模式的效果, 我们进行新、旧数值方法的对比实验. 数值模拟时, 采用的大气状态诸要素的资料来自 NCEP 分析资料, 而 GPS 资料是从 GPS/MET 得来的<sup>[9]</sup>. 我们用了 1995 年 11 月 10 日 1:09UTC 到 1995 年 11 月 10 日 2:26UTC 时间段上连续 10 个 GPS 掩星记录资料, 即 GPS 折射角, 来做数值试验和比较.

对每一个 GPS 掩星记录资料的处理是这样的, 根据 GPS 掩星记录资料中提供的 GPS 卫星与 LEO 卫星的位置模拟算出相应的 GPS 折射角<sup>[3]</sup>和与折射率有关的高度参数(称为影响参数<sup>[3]</sup>), 从而得到模拟的 GPS 折射角随影响参数变化的廓线. 把模拟廓线各取值高度上的点线性插值到由 GPS 掩星观测得到的廓线上的相应高度点上, 就可以对模拟廓线进行误差分析.

我们用四阶 Runge-Kutta 方法(旧方案)和本文提出的隐式交替方向求解法(新方案)求解 GPS 射线打靶法观测算子, 并得到了两种方案的 GPS 折射角随影响参数变化的模拟廓线. 图 3(a)和图 3(b)分别为采用新、旧两种方案对 1995 年 11 月 10 日 1:09UTC 时刻 GPS 掩星记录资料的数值模拟结果. 图中带黑色圆点虚线为观测结果, 实线为旧 GPS 射线打靶法观测算子模拟结果. 为了衡量两种方案的模拟效果, 在表 1 中, 我们给出了 10 个 GPS 折射角序列的均方根误差和相对误差. 而采用旧方案模拟得到的 10 个 GPS 折射角序列与观测得到的 10 个 GPS 折射角序列之间的总均方根误差和总相对误差分别为:

$$RMS = 1.3320974 \times 10^{-4},$$

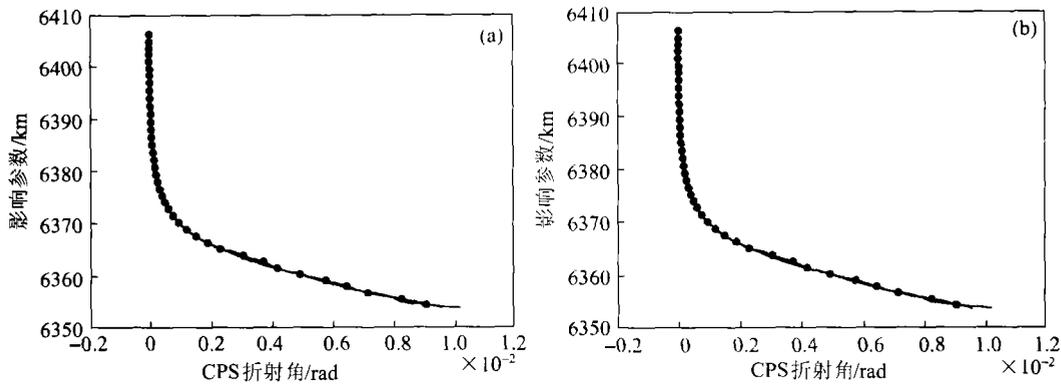


图 3 数值模拟结果与观测结果(带黑色圆点虚线)的比较

(a)中实线为旧 GPS 射线打靶法观测算子模拟结果;(b)中实线为新 GPS 射线打靶法观测算子模拟结果

$$E_r = 3.4206729 \times 10^{-2}.$$

类似地,采用新方案的总均方根误差和总相对误差分别为:

$$RMS = 1.2545802 \times 10^{-4},$$

$$E_r = 3.3215440 \times 10^{-2}.$$

表 1 数值模拟效果比较

掩星记录时刻	用时(min-s)		误差均方根		相对误差	
	旧	新	旧	新	旧	新
1:09UTC	5-31.31	1-32.69	9.07171E-05	9.32183E-05	2.460E-02	2.512E-02
1:12UTC	6-07.37	1-40.65	1.13171E-04	1.02173E-04	5.720E-02	5.618E-02
1:23UTC	4-27.38	1-16.08	1.25158E-04	1.24442E-04	4.169E-02	3.624E-02
1:27UTC	3-55.22	1-06.26	1.50492E-04	1.50389E-04	4.472E-02	4.469E-02
1:30UTC	6-33.00	1-48.10	1.73256E-04	1.15672E-04	3.155E-02	2.738E-02
1:37UTC	4-46.18	1-19.47	1.06425E-04	1.06618E-04	4.172E-02	4.177E-02
1:40UTC	4-02.22	1-09.15	1.66218E-04	1.66199E-04	4.863E-02	4.861E-02
2:19UTC	6-32.53	1-50.17	5.78762E-05	5.70055E-05	1.353E-02	1.337E-02
2:20UTC	6-13.31	1-44.38	1.36293E-04	1.34497E-04	2.728E-02	2.771E-02
2:26UTC	4-16.78	1-13.38	1.28157E-04	1.28257E-04	3.207E-02	3.209E-02

比较新、旧 GPS 射线打靶法的数值方案,可以发现,新方案不但计算时间减少为旧方案的 1/4,并且从模拟效果(算得的误差均方根值和相对误差)上看,它的精度与旧方案相当,在观测误差很小的情况下,模拟精度略有改进。采用新方案后,有 7 个个例的误差均方根小于旧方案个例的误差均方根,有 6 个个例的相对误差小于旧方案的相对误差。从总的模拟效果上看,新方案的误差均方根和相对误差也要小一些。这是因为我们所用的辛几何算法更好地保留了微分方程的物理性质。

综上,我们使用先进的数值方法对 GPS 射线打靶法模式进行了改造,在精度相当的前提下,达到了省时 1/4 的效果,这为解决 GPS 资料变分同化问题迈出了重要的一步。

## 参 考 文 献

- 1 Wang B, et al. Data assimilation and its applications. Proc Natl Acad Sci USA, 2000, 97(21): 11143
- 2 Zou X, et al. Use of GPS/MET refraction angles in 3D variational analysis. Q J R Meteorol Soc, 2000, 126(570): 3013
- 3 Zou X, et al. A ray-tracing operator and its adjoint for the use of GPS/MET refraction angle measurements. J Geoph Res, 1999, 104 (D18): 22301
- 4 Zou X, et al. Assimilation of atmospheric radio refractivity using a nonhydrostatic adjoint model. Mon Weather Rev, 1995, 123: 2229
- 5 Kuo Y H, et al. A GPS/MET sounding through an intense upper-level front. Bull Amer Met Soc, 1998, 79: 617
- 6 Kuo Y H, et al. The impact of GPS data on the prediction of an extratropical cyclone: An observing system simulation experiment. J Dyn Atmos Ocean, 1997, 27: 413
- 7 冯 康, 等. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法. 自然科学进展, 1991, 1(2): 102
- 8 Feng K. On difference schemes and symplectic geometry. In: Feng Kang, ed. Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations—Computation of Partial Differential Equations, Beijing: Science Press, 1985. 42 ~ 58
- 9 Ware R, et al. GPS sounding of the atmosphere from low earth orbit: Preliminary results, Bull Am Meteor Soc, 1996, 77: 19